INSTITUT FRANÇAIS DE L'ÉDUCATION
n° 105
Nov. 2015

Sommaire

Dossier de veille de l'IFÉ

LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES AU PRIMAIRE

Les 12 et 13 novembre 2015, le Conseil national de l'évaluation du système scolaire (CNESCO) et l'Institut français de l'éducation (IFÉ) ont organisé une conférence de consensus sur l'apprentissage des nombres et des opérations à l'école primaire. Parmi les questions posées aux experts figure celle-ci : « Quelles relations établir entre la résolution de problèmes et l'introduction des opérations et de leurs propriétés ? ». C'est E. Sander et J.-F. Richard qui ont été chargés de répondre à cette question. En tant que professeurs de psychologie (cognitive), ils ont expliqué l'importance des énoncés de problèmes dans le processus de compréhension de notions mathématiques abstraites, et du passage d'une « sémantique quotidienne » à une « sémantique mathématique ». C'est dans ce contexte que s'inscrit ce Dossier de Veille : réaliser une synthèse de travaux sur la résolution de problèmes mathématiques, à destination d'acteurs de l'enseignement primaire.

Après avoir listé les enjeux d'une vision institutionnelle de la résolution de problèmes, cet état de l'art tente une typologie de la notion de « résolution de problèmes » en mathématiques, avant de présenter divers travaux de recherche relatifs à la résolution de problèmes du point de vue opérationnel (techniques opératoires) ou cognitif pour aborder les processus, stratégies et contextes.

Par Annie Feyfant

Chargée d'étude et de recherche au service Veille et Analyses de l'Institut français de l'Éducation (IFÉ)

ENJEUX ET OBJECTIFS DÉCLARÉS

La compétence à résoudre des problèmes (mathématiques) est souvent citée comme l'une des compétences clés du XXI^e^ siècle. Or, les analyses qui suivent la publication des évaluations PISA viennent par exemple de relever, à partir du questionnement des élèves, qu'il existait une corrélation étroite entre moindre performance en mathématiques et manque de confiance des élèves dans leur capacité à résoudre des problèmes de mathématiques, notamment de mathématiques appliquées. Ce niveau de confiance est par ailleurs étroitement lié à la pratique régulière de résolution de problèmes du même type que les items évaluatifs de PISA et, en ce qui concerne les problèmes de mathématiques appliquées, à la compréhension du problème en lui-même et au contexte dans lequel il s'inscrit (Borgonovi, 2015).

COMPARATIF INTERNATIONAL

Des évaluations internationales interprétables

Les évaluations PISA cherchent, entre autres performances, à évaluer celles des élèves dans cet exercice particulier de la résolution de problèmes. Les résultats PISA 2012 montrent que la Finlande, l'Angleterre, l'Estonie, la France, les Pays-Bas, l'Italie, la République tchèque, l'Allemagne et la Belgique (par ordre décroissant de leur score moyen) obtiennent tous des résultats supérieurs à la moyenne de l'OCDE, mais inférieurs aux pays les plus performants, situés en Asie du Sud-Est. La France fait partie des 13 pays dont la performance des élèves en résolution de problèmes est supérieure à la performance attendue et 16 % des élèves des pays européens participants sont « *incapables de se livrer à un processus d'analyse de situations ou de résolution de problèmes qui leur impose d'aller au-delà d'une collecte directe d'informations* » (EACEA, 2011). Ils ne réussissent que pour des problèmes structurés, dans des contextes univoques. TIMSS 2007 ● différencie ces problèmes de ceux pour lesquels la solution n'est pas immédiatement évidente, et dont la résolution est une pratique moins courante (pour 23 % des élèves, en moyenne, voir Mullis *et al*., 2012).

Quels autres « enseignements » peut-on tirer des évaluations internationales ? « *Pour résoudre des problèmes interactifs, les élèves doivent se montrer ouverts à la nouveauté, accepter le doute et l'incertitude, et oser utiliser leur intuition pour amorcer une solution* » (OCDE, 2014a). Les élèves performants sont mieux équipés pour « *élaborer une représentation mentale cohérente de la situation problème, planifier les étapes pour atteindre l'objectif ciblé, adapter leur stratégie en fonction des informations qu'ils découvrent et réfléchir aux problèmes et à leur solution* » (OCDE, 2014a).

Le rapport PISA 2012 constate la tendance croissante d'une demande institutionnelle (ou sociétale) de compétences spécifiques en résolution de problèmes, notamment en l'Allemagne, entre 1979 et 1999, au Japon, entre 1960 et 2005, ou aux États-Unis, entre 1960 et 2009. Ainsi, des compétences d'analyse sur des situations non routinières (qui nécessitent des connaissances implicites et ne peuvent être définies qu'imparfaitement par une série de règles et procédures) sont de plus en plus requises, alors que les compétences plus manuelles sont beaucoup moins sollicitées. Ces tâches analytiques sont par ailleurs des tâches nécessitant une certaine abstraction et une transformation des données et informations (OCDE, 2014b). Sous cet angle, « *les compétences en résolution de problèmes renvoient à la capacité d'un individu à s'engager dans un traitement cognitif pour comprendre et résoudre des problèmes, en l'absence de méthode de solution évidente, ce qui inclut sa volonté de s'engager dans de telles situations pour exploiter tout son potentiel de citoyen constructif et réfléchi* » (OCDE, 2014a).

Un enjeu commun aux différents curriculums nationaux

La mise en avant du rôle de la résolution de problèmes n'est pas uniquement le fait d'organisations internationale (OCDE) ou européenne (Commission européenne), on en trouve la trace dans les principes fondamentaux des curriculums nationaux. Les processus de résolution de problèmes « *devraient être la source et le support principal de l'apprentissage des mathématiques pendant tout le primaire* » en Espagne, par exemple (Mullis *et al*., 2012). En 2005, le ministère de l'éducation ontarien publie « Le curriculum de l'Ontario, de la 1re à la 8e année – Mathématiques » (Ontario, 2005). On y insiste sur l'importance de la résolution de problèmes qui « *ne devrait plus faire débat puisque ce processus joue un rôle central dans l'apprentissage*. *Les situations de résolution de problèmes sont, pour la plupart, issues de la vie quotidienne de l'élève, ce qui permet à l'élève de faire des liens entre le monde qui l'entoure et les mathématiques* ». L'activité est associée à la notion d'effort, de solution qui ne soit pas hors d'atteinte, de travail collaboratif avec les pairs (surtout pour les tâches complexes).

● L'enquête TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) évalue les performances en sciences et mathématiques. La résolution de problèmes est étudiée pour la huitième année de scolarité (collège) dans l'enquête TIMSS 2007 mais n'apparaît pas dans l'analyse des données 2013.

« *Les activités menant à la résolution d'un problème ne devraient nullement être circonscrites autour d'une solution unique, d'une seule façon de faire ou d'un travail en solitaire* ». Le processus proposé (avec des moments de communication à chacune des étapes) est le suivant :

- comprendre le problème : relire et reformuler, repérer l'information donnée et l'information nécessaire (parler du problème pour mieux le comprendre) ;
- élaborer un plan : comparer avec des expériences antérieures, étudier les stratégies possibles, choisir une stratégie ou un ensemble de stratégies (parler pour clarifier la méthode, écouter les idées des autres) ;
- mettre le plan en œuvre : appliquer la stratégie choisie, faire les calculs nécessaires, s'assurer de l'exactitude des résultats provisoires (tracer des diagrammes, utiliser du matériel pour illustrer, écrire les étapes en mots ou symboles, expliciter l'usage de l'ordinateur ou de la calculatrice) ;
- faire une vérification des résultats : vérifier le caractère raisonnable de la réponse, revoir la méthode, déterminer s'il y une meilleure façon de procéder, étudier les prolongements ou variations possibles (choisir la meilleure méthode pour décrire et expliquer les résultats).

Le Luxembourg a mis en œuvre une réforme basée sur les compétences. Dans ce cadre, la résolution de problèmes arithmétiques est envisagée dans les « compétences relatives aux contenus » (résoudre un problème constituant la première « compétence générale » du plan d'action, voir Vlassis *et al.*, 2014).

La résolution de problèmes, qui est souvent associée, dans l'enseignement secondaire, à la démarche d'investigation, au concept de tâches complexes ou encore à un travail en groupe, reste, pour l'enseignement primaire, du domaine du raisonnement, des choix stratégiques, appliqués aux techniques opératoires ou à des exercices mobilisant « les fondamentaux », notamment dans les plus petites classes. « *En mathématique, l'école primaire est le lieu de l'initiation à l'argumentation alors que le collège est le lieu de l'initiation à la démonstration* » (Cabassut, 2004).

TENTATIVE DE TYPOLOGIE LIÉE À LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Les travaux de recherche sur la résolution de problèmes (en mathématiques) abordent cette problématique selon les objectifs de ces problèmes, sous l'angle des théories de l'apprentissage ou encore selon une typologie de ces problèmes.

Objectifs attribués à la résolution de problèmes

Pallascio explicite l'utilisation de situations problèmes (qui ne doit pas être confondue avec la pédagogie du projet) par une inversion du contrat didactique dans des modalités d'apprentissage de nouveaux contenus : l'enseignant place l'élève « *face à une situation potentiellement riche en création d'instruments mathématiques* ● » (Charlot, cité par Pallascio, 2005). Dans cette configuration, le problème précède l'explication notionnelle. La résolution de situations-problèmes est une activité de production et non de reproduction : concevoir une stratégie au lieu d'en appliquer une ; chercher et non exécuter ; créer, analyser, synthétiser et justifier. Les étapes de ce type de processus sont les suivants :

- consignes de l'enseignant (conditions de travail, énoncé, produit attendu) ; travail en équipe (au centre de l'activité d'apprentissage) ;
- communication (présentation par les équipes des productions réalisées et du cheminement poursuivi) ;
- synthèse des élèves (consignation des acquisitions conceptuelles et procédurales) ;
- synthèse de l'enseignant (institutionnalisation des savoirs).

● Selon les auteurs, un « instrument mathématique » peut aussi bien avoir été construit par les élèves, au cours de leur activité mathématique, à partir d'un artefact, que proposé par l'enseignant, ou être tout simplement un outil, tel que la règle, le compas, etc.

Verschaffel, Greer et De Corte (2000) insistent quant à eux sur l'intérêt du développement de stratégies métacognitives et heuristiques mobilisées aux différentes étapes du processus de résolution de problèmes décrit par Pallascio (Vlassis *et al.,* 2014). Au delà de ces deux objectifs, la résolution de problèmes reste un moyen privilégié pour l'application de nouveaux savoirs enseignés.

Des courants théoriques

La démarche de résolution de problème mathématique peut être abordée sous un angle socioconstructiviste, considérant la résolution de problème comme une modalité pédagogique (les situations-problèmes), également décliné en « *modèle activiste influencé par le constructivisme piagétien et les travaux en didactique des mathématiques et pour lequel le problème devient le moyen privilégié de donner du sens aux connaissances enseignées* » (Sarrazy, 2008, cité par Demonty & Fagnant, 2012)

Dans une approche cognitive, on étudie les processus de résolution de problèmes et les stratégies (métacognitives, heuristiques) de résolution (Verschaffel & De Corte, 2008). L'influence de la psychologie cognitive a été critiquée, parfois vivement, par certains auteurs (didacticiens) craignant « *une "démathématisation" de l'enseignement au sens où l'activité de résolution de problèmes deviendrait une activité pour elle-même (résoudre pour résoudre ou apprendre à résoudre)* » (Mercier ou Sarrazy, cités par Demonty & Fagnant, 2012).

Typologie des problèmes eux-mêmes

On peut analyser les processus d'utilisation de la résolution de problèmes selon une typologie développée à partir de celle proposée par Charnay en 1992 :

- problèmes ouverts ● : énoncé court qui n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de question intermédiaire), qui reste dans le domaine conceptuel connu de l'élève et lui permet de développer des compétences plus méthodologiques (situation de recherche) ;
- situations problèmes : problèmes destinées à engager les élèves dans la construction de nouvelles connaissances (donner du sens) ;
- problèmes de réinvestissement : destinées à permettre l'utilisation des connaissances déjà étudiées (problèmes d'application) ;
- problèmes d'intégration : destinés à permettre aux élèves l'extension du champ d'utilisation d'une notion déjà étudiée ;
- problèmes de synthèse : les élèves doivent utiliser conjointement plusieurs catégories de connaissances ;
- problèmes permettant de faire le point sur les connaissances maîtrisées (évaluation) ;
- problèmes qui peuvent être ouverts, de type « application » ou « intégration », mais dont la complexité nécessite de mettre en œuvre une démarche de « modélisation mathématique », y compris heuristique ● (Verschaffel, Greer & De Corte, 2000).

Un même énoncé peut, selon le moment, selon les connaissances initiales de l'élève, relever de l'une ou l'autre de ces catégories.

Notion introduite par Arsac, Germain & Mante (1991), reprise par Charnay (1992).

« *Le terme d'heuristique est à prendre dans le sens donné par Verschaffel, De Corte, Lasure, Van Vaerenbergh, Bogaerts et Ratinckx (1999), c'est-à-dire de stratégies de résolution souvent informelles, telles que dessiner, établir une liste ou un tableau ou encore utiliser les essais-erreurs* » (Vlassis et al., 2014).

LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES : INSTRUMENTATION ET COGNITION

UN OUTIL D'APPRENTISSAGE DES TECHNIQUES OPÉRATOIRES

La résolution de problèmes additifs

Pour résoudre une addition simple (nombres à un chiffre), les élèves peuvent utiliser des objets (collections représentant les quantités à additionner) ; compter sur les doigts ; compter à haute voix ; récupérer le résultat en mémoire à long terme (fait arithmétique constitué) ou décomposer (pour faire 5+6, on passe par un résultat en mémoire, comme 5+5). Ces dernières stratégies (faire appel à sa mémoire à long terme) ont un coût cognitif moindre mais, à défaut, les élèves les plus jeunes utilisent une diversité de procédures identifiées par Baroody, Ginsburg et Waxman (1983, cités par Fayol *et al.*, 2005) :

- réunir (*vs* séparer) physiquement puis dénombrer (« Jean avait 8 billes. Il en a donné 5 ») ;
- compter à partir du premier cardinal fourni ou à partir du plus grand des deux ;

- compter en arrière à partir de ou jusqu'à ;
- mettre en correspondance (« Jean a 8 billes. Tom a 5 billes. Combien Jean a-t-il de billes de plus que Tom? » ;
- récupérer directement la réponse en mémoire.

Les problèmes de partage et de division

La division ou plus exactement le fait de diviser est un concept qui n'est pas si simple à appréhender pour les élèves de début de primaire. Avant d'en arriver au concept de division, les élèves passent par la notion de partage, qui consiste à diviser un gâteau, une collection d'objets. Brissiaud explique le concept arithmétique de la division du point de vue des situations de divisions et des procédures (ou schèmes selon Vergnaud) pour effectuer une division.

- « *la conceptualisation de la "*division par *n" permet notamment de regrouper les situations de "partage en* n *parts égales" et celles de "groupement par* n*" parce que la division est un mode de traitement commun à ces deux sortes de situations ;*
- *la conceptualisation de la division permet aussi de regrouper les procédures permettant de réaliser un "partage en* n *parts égales" et les procédures permettant de réaliser un "groupement par* n*" parce que ces procédures conduisent aux mêmes résultats numériques (nous dirons qu'elles sont équivalentes)* ». (Brissiaud, 2006).

Avant 1970, on distingue deux usages de la division, la première qui permet de « *connaître la valeur d'une part quand on partage une quantité de façon équitable en n parts égales* » et la seconde qui permet « *de connaître le nombre de groupes de* n *qu'il est possible de former avec cette même quantité* » (Brissiaud, 2006).

Dans la phase d'oralisation du calcul, « *a* divisé par *b* », « en *a* combien de fois *b* ? » fait suite à « *a* partagé en *b* parts égales » ou « avec *a* combien de groupes de *b* peut-on former ? ». Brissaud donne comme exemple 152 : 3, c'est-à-dire 3 groupes de 50 et il reste 2 ; ou 50 fois 3 et il reste 2. L'élève est sensé comprendre qu'il a le choix entre un scénario de partage ou de groupement, pour un résultat numérique identique. « *La division est l'opération arithmétique qui résulte de l'équivalence* » des deux procédures, mais l'équivalence ne va pas de soi pour les élèves (Brissiaud, 2006).

Cependant, au cycle 2, au problème « avec 13 gâteaux, combien peut-on faire de paquets de trois gâteaux ? » (A), les élèves vont opérer des groupements de 3 gâteaux et compteront le nombre de groupes de 3 ainsi formés. Si l'on pose le problème de la manière suivante : « on partage équitablement 13 images entre 3 enfants. Combien d'images chaque enfant reçoit-il ? » (B), les élèves vont dessiner 3 bonshommes et répartir, une par une les images. On compte des groupes de trois dans le premier cas et des unités simples de l'autre. On s'aperçoit qu'avant l'enseignement de la division, les procédures informelles utilisées par les élèves sont des procédures de simulation, soit en utilisant des objets (A), soit en procédant à un comptage (B), soit en utilisant des relations numériques connues.

Autres problèmes testés au début du CE1 (Brissiaud, 2006) :
Problèmes de groupement :
- avec 40 gâteaux, combien peut-on faire de paquets de 10 gâteaux ? (Taux de réussite : 52 %) ;
- avec 40 gâteaux, combien peut-on faire de paquets de 4 gâteaux ? (Taux de réussite : 15 %).

Problèmes de partage :
- on partage 40 images entre 10 enfants en faisant des parts égales. Combien d'images chaque enfant va-t-il recevoir ? (Taux de réussite : 10 %) ;
- on partage 40 images entre 4 enfants en faisant des parts égales. Combien d'images chaque enfant va-t-il recevoir ? (Taux de réussite : 48 %).

Les quatre opérations dès le CP ?

L'apprentissage des quatre opérations dès le CP (avant 1970) était lié à l'apprentissage des tables de multiplication. Ainsi à la question « 35 cerises sont partagées entre 5 personnes », les élèves peuvent recoder le problème sous la forme « 5 fois ? égale 35 » et trouver la réponse s'ils ont appris la table de 5, sous la forme « 5 fois 7, 35 ». Ce format d'apprentissage des tables (5 fois 1, 5 fois 2, etc. ; et non 1 fois 5, 2 fois 5, etc.) « *avait sa raison d'être : c'est celui qui favorise le mieux la résolution des problèmes de partage en s'appuyant sur les résultats de tables de multiplication* » et « *les auteurs de manuels adaptaient le format d'apprentissage des tables de multiplication à la progression qu'ils avaient adoptée concernant la division* » (Brissiaud, 2006).

Cependant, les recherches montrent un certains nombres de difficultés rencontrées par les élèves. Ils ne « *transférent pas facilement la commutativité de la multiplication à celle de la multiplication à trou qu'est la division* » (Squire & Bryant, 2002 ; Brissiaud, 2004, cités par Brissiaud 2006). Une autre difficulté réside « *dans la compréhension-interprétation des énoncés et dans la mise en relation du résultat de cette compréhension avec les procédures de résolution* » (Fayol *et al.*, 2005). Pour les problèmes à énoncé verbal, les élèves doivent posséder des connaissances conceptuelles « *relatives aux accroissements, diminutions, combinaisons et comparaisons [et un choix judicieux des énoncés induit] une (re)conceptualisation des situations, et [favorise] la progression des savoirs et savoir-faire arithmétiques* » (Fayol *et al.*, 2005 ; Brissiaud, 2002).

Les situations observées montrent une pratique tout autre, consistant à proposer aux élèves des « *problèmes dont les formes et contenus sont fortement stéréotypés* », pour un « *apprentissage systématique de la résolution de problèmes particuliers* » (Fayol *et al.*, 2005). Ces problèmes stéréotypés comportent des énoncés construits de telle manière que le processus (additif, soustractif, multiplicatif) sera déductible sans que l'élève ait à mobiliser une quelconque stratégie, en l'incitant à appliquer une démarche procédurale, pour obtenir un résultat « qui tombe juste ». Cela conduit certains élèves à produire un résultat irréaliste, sans aucun recul.

LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES : UNE DÉMARCHE COGNITIVE

Pour De Corte et Verschaffel (2008), les élèves « *doivent développer une démarche mentale qui requiert la maîtrise coordonnée de cinq catégories d'outils cognitifs* » :

- une base de connaissances spécifiques (certains utilisent la notion de connaissances disciplinaires). Ces connaissances, accessibles et organisées de façon cohérente et flexible doivent intégrer les faits, symboles, algorithmes, concepts, et règles « *qui constituent la table des matières des mathématiques en tant que discipline* » ;
- des stratégies de recherche en situation de problèmes. Elles augmentent significativement la probabilité de trouver une solution correcte, car elles induisent une approche systématique de la tâche ;
- des connaissances métacognitives : savoir observer, savoir être attentif, savoir gérer ses émotions, savoir utiliser ses mémoires, savoirs raisonner, savoir comprendre et apprendre ;
- des stratégies d'autorégulation (cognitive, motivationnelle ou conative ●). Elles impliquent l'intégration de stratégies portant sur les processus cognitifs (autorégulation cognitive) et d'autres portant sur les processus conatifs (autorégulation motivationnelle ou conative). « *Il existe quatre stratégies majeures d'autorégulation cognitive : la détermination du but, la planification, le contrôle et l'ajustement* » (Focant & Grégoire, 2008) ;
- des croyances associées aux mathématiques. Parmi ces croyances, il faut distinguer trois catégories : les croyances relative à sa propre relation à l'apprentissage et à la résolution de problèmes mathématiques ; les croyances liées au contexte social

Conative : qui se rapporte à la volonté et à l'effort.

dans lequel les activités mathématiques prennent place (justification) et, enfin, les croyances au sujet des mathématiques elles-mêmes, à la résolution de problèmes et à l'apprentissage mathématique.

On peut ajouter à cette liste d'outils ce que Focant et Grégoire nomment les connaissances métacognitives qui concernent les capacités du sujet, les caractéristiques des tâches et la validité des stratégies (2008).

LES PROCESSUS MOBILISÉS DANS L'ACTIVITÉ DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

À partir du contenu des manuels scolaires, de ce qui se passe en classe et des enquêtes menées, on observe deux types d'activités associées à la résolution de problèmes : « *celles qui visent à modéliser et arithmétiser les situations en vue de résoudre les problèmes correspondants [et] celles qui cherchent plutôt à exercer des routines de résolution (des schémas de problèmes) voire des algorithmes* » (Gravemeijer, 1997 ; cité par Fayol *et al.*, 2005).

Bien souvent, les situations problèmes sont évoquées verbalement. Il s'agit d'amener l'élève à cheminer à partir d'informations incomplètes, mais à partir desquelles il va mobiliser ses connaissances pour en déduire la valeur de ces inconnues.

Les difficultés des élèves en résolution de problèmes tiennent à la complexité et à l'interactivité des compétences qu'ils doivent mettre en œuvre. Corrélativement, les enseignants ne sont guère mieux armés pour comprendre les mécanismes cognitifs (et métacognitifs) en jeu.

Stratégies et processus de résolution de problèmes

Résoudre un problème consiste donc à évoquer (ou invoquer) des actions et des procédures associées à la situation problème. Les élèves sont conduits à interpréter de manière cohérente la situation et mettre en œuvre des savoir-faire. S'ils ne peuvent associer le problème ni à un problème du même type ni à une procédure connue, ils vont construire un « espace-problème », qui « *engendre un espace de recherche à partir duquel sont tentés des essais de solution* » (Richard, 1997). Cet espace de recherche se définit, au sens de Richard, par la description d'un état initial (situation de départ), du but à atteindre (situation à obtenir pour que le problème soit résolu), des opérateurs (actions, moyens à mettre en œuvre) et des contraintes de leur application.

Pour Brissiaud (2006), l'apprentissage de la résolution de problèmes peut se faire à partir d'exemples en « situation de résolution de problèmes » (en psychologie) ou « problème-types » (en pédagogie). La résolution de ces problèmes se fait par analogie, par la recherche en mémoire d'un problème proche. L'analogie peut être « superficielle » ou « profonde ». Or, ce processus d'apprentissage fonctionne mieux avec les « bons élèves », les élèves les moins avancés utilisant les analogies superficielles ●.

Dans le cas d'un énoncé tel que « 6 enfants se partagent équitablement un paquet de gâteaux ; chacun reçoit 4 gâteaux, combien y avait-t-il de gâteaux dans le paquet ? », ces élèves vont opérer une division car ils ont retenu l'idée de partage.

Limite de l'analyse des processus cognitifs

Si Barrouillet et Camos (2003) précisent qu'« *il est donc nécessaire de développer à la fois une meilleure compréhension des processus cognitifs en jeu dans cette activité et des stratégies didactiques plus efficaces que celles dont nous disposons* », ils soulignent également la difficulté d'analyser les processus cognitifs du fait de la complexité de la tâche à analyser. En effet, plusieurs modèles entrent en jeu : compréhension de texte, description des représentations qui en résultent, mobilisation et mise en œuvre des connaissances numériques. Or, habituellement, la psychologie cognitive traite de manière distincte la compréhension de texte, le raisonnement et l'arithmétique cognitive.

ENTRE CONCEPTS ET STRATÉGIES

L'adoption d'une stratégie plutôt qu'une autre ne tient pas uniquement à la familiarité avec tel ou tel problème. Des concepts, des formulations, des actions interfèrent dans les processus de compréhension.

Taxonomie des connaissances conceptuelles liées à la résolution de problèmes

Une première taxonomie (Riley, Greeno & Heller, 1984), basée sur les actions et opérations, fait référence. Elle distingue :

- les **problèmes de changement** qui impliquent la transformation temporelle d'un état initial (des données) et aboutissent à un état final, par accroissement ou diminution. Par exemple, Jean et Tom ont 8 billes ensemble ; Jean a 3 billes ; combien de billes Tom a-t-il ? ;
- les **problèmes de combinaison** qui concernent des situations statiques, comme par exemple, Jean a 5 billes, Tom a 3 billes, combien ont-ils de billes ensemble ? ;
- les **problèmes de comparaison** dans lesquels il s'agit de comparer des situations statiques, à l'aide de formulations du type « plus de/ moins de ». Par exemple, Jean a 3 billes, Tom a 5 billes de plus que Jean ; combien de billes Tom a-t-il ?

Les résultats des recherches montrent que les problèmes de type « changement » sont plus faciles que les autres, que la transformation évoquée soit positive (accroissement) ou négative (diminution). Par contraste, les problèmes de type « comparaison » sont les plus difficiles. Le taux de réussite baisse progressivement lorsque le calcul se focalise sur la situation finale, la transformation (ou le complémentaire) ou l'état initial. « *Ces différences de réussites s'expliquent au moins en partie par le recours à des procédures de résolution qui changent en fonction des types de problèmes* » (Fayol *et al.*, 2005).

La classification proposée par Vergnaud, en 1982, est largement utilisée dans les travaux anglophones. Vergnaud distingue trois types de concepts : la mesure (les anglophones parlent de quantités, d'autres parlent d'état), les transformations temporelles et les relations statiques, qui vont être croisées avec les actions/opérations de changement, combinaison, comparaison. Les procédures de résolution utilisées par les plus jeunes transforment en actions les éléments décrits dans l'énoncé. Pour Vergnaud, les élèves ont plus de difficultés à résoudre les problèmes dans lesquels ils doivent quantifier une relation, comme par exemple dans le problème : « Pierre a 8 billes, Jean a 3 billes. Combien de billes Pierre a-t-il de plus que Jean ? ». Il ne s'agit pas de quantité (on connaît le nombre de billes qu'à chacun), de transformation (personne ne gagne ou ne perd de billes) mais de relation (entre deux quantités).

Autre constat, *« en troisième année primaire, les deux tiers des réponses font appel aux "faits numériques" directement récupérés en mémoire* » (Ashcraft & Battaglia, 1978; Ashcraft & Fierman, 1982, cités par Fayol *et al.*, 2005). D'autre part, plus que l'opération à effectuer, ce sont « *la sémantique et la structure du problème [qui] déterminent pour une large part les performances et les stratégies des sujets* » (Barrouillet & Camos, 2003), autrement dit la forme, la nature et la difficulté de construction de la représentation influent sur les performances.

Un fait numérique, ce peut être « 2+2=4 » ou « 9 vient après 8 ».

Pour les chercheurs en psychologie cognitive, comprendre un problème c'est en construire une représentation. Or, cette compréhension peut s'effectuer par « particularisation d'un schéma » ou par construction d'une représentation particularisée de situation. *« Ainsi, le sujet sélectionnerait le schéma correspondant à l'organisation relationnelle des données et mettrait en œuvre les procédures pertinentes. Le problème est alors résolu* ». (Barrouillet & Camos, 2003). Sauf que… certains problèmes ne correspondent pas directement à des schémas utilisables (Kintsch & Greeno, 1985) et que les procédures ne sont pas strictement associées aux dimensions sémantiques et conceptuelles énoncées plus haut ; « *leur déclenchement dépend aussi d'autres contraintes, notamment liées à la présentation des énoncés* » (Fayol *et al.*, 2005). Ainsi, la place de la question dans l'énoncé s'avère parfois déterminante. Pour Devidal *et al.* (1997), l'énoncé apporte une information organisatrice permettant d'activer le « schéma adéquat », l'intégration des données qui suivent la question et le calcul en cours de lecture de l'énoncé. On verra plus loin la notion de coût cognitif que le placement de la question pourrait ou non engendrer et la description

« Un schéma est un ensemble de connaissances abstraites qui peuvent être définies comme les traces laissées en mémoire [à long terme] par les situations rencontrées précédemment et organisées en objet structuré ayant un certain nombre de propriétés caractéristiques » (Kintsch & Greeno, 1985 ; Schank & Abelson, 1977).

d'expérimentations qui montrent qu'en l'absence de schéma en mémoire à long terme (les élèves n'ont pas retenu d'énoncés similaires), les sujets sont obligés de construire en mémoire de travail « *une représentation* ad hoc *de la situation problème dite modèle de situation* » (Kintsch, 1979, cité par Barrouillet & Camos, 2003) ou modèle mental (Johnson-Laird, 1983).
Il est possible d'aider à la construction de cette représentation adéquate, soit en utilisant du matériel concret, soit en apprenant aux enfants à représenter les relations entretenues par les différentes quantités du problème sur des diagrammes (Willis & Fuson, 1988 ; Levain *et al*., 2006). Si Vergnaud propose que les élèves en difficulté utilisent des diagrammes, Julo y voit le risque que les élèves associent « *un schéma mental à une forme symbolique spécifique prédéfinie* ». Pour pallier ce risque, l'enseignant doit proposer aux élèves une diversité de situations « *afin qu'ils puissent exercer les schèmes existants, tout en cherchant à faciliter l'identification du but à atteindre, de la catégorie de problèmes ou de l'information à sélectionner* » (Priolet, 2014).

La résolution de problèmes : une affaire de stratégie à l'économie

Les problèmes arithmétiques verbaux ● à plusieurs étapes peuvent être résolus par différentes stratégies. La question est de savoir comment se construisent ces stratégies ou plus exactement comment et pourquoi les élèves vont choisir telle ou telle stratégie. Les études faites sur la construction des représentations qui mènent à ce choix sont rares pour les adultes et encore plus pour les élèves. On connaît le rôle que la formulation du problème, la taille des nombres utilisés, mais aussi les caractéristiques individuelles (capacité en mémoire de travail, compétences expérientielles, etc.) jouent dans ces choix stratégiques.

● Les problèmes arithmétiques verbaux ou à énoncés verbaux racontent des histoires. Ils sont donnés avec des mots et font intervenir peu de symbolisme mathématique. En anglais on utilise les expressions « word problems » ou « story problems ».

D'autre part, on observe que les individus ne cherchent pas de stratégie alternative dès lors qu'ils ont un accès à une stratégie plus évidente (suggérée par l'énoncé, le plus souvent). La stratégie alternative ne sera mobilisée que si elle est moins couteuse cognitivement que la stratégie initiale : « *Le haut coût cognitif du calcul justifie l'allocation de ressources à la mise en place d'une meilleure stratégie susceptible de libérer des ressources en mémoire de travail* » (Thevenot, 2008).

La psychologie du développement s'intéresse à ces choix stratégiques qui mobilisent ou non la mémoire de travail, mais aussi aux contraintes qui doivent être relâchées avant d'opérer ces stratégies, contraintes d'ordre cognitif, faites entre autres de paquets d'informations à déconstruire et reconstruire pour aboutir à la résolution du problème.

Exemples d'énoncés proposés à des élèves de CM2 :
Les données suivantes :
« Jean a 37 billes(J), Tom a 19 billes (T) et Paul a 12 billes (P) » sont associées à l'une des trois questions décrites précédemment :
- « Combien Jean, Tom et Paul ont-ils de billes ensemble ? » (Q1) ;
- « Combien Jean et Tom ensemble ont-ils de billes de plus que Paul ? » (Q2) ;
- « Combien Jean a-t-il de billes de plus que Tom et Paul ensemble ? » (Q3).

Selon la place des données dans l'énoncé, par rapport à la question, les stratégies seront différentes, et peuvent se traduire en terme de coût par rapport à l'usage de la mémoire de travail. Si on énonce les données avant la question, l'élève va-t-il retenir les informations précédant la question ou va-t-il attendre la question pour savoir quels sont les éléments importants.

Pour l'énoncé Q2, les élèves partent de leur représentation initiale du problème pour le résoudre avant de lire la question, mais cela nécessite de composer, décomposer, recomposer par paquets. Si on place la question en début d'énoncé les choses sont très claires pour la question Q1 où l'élève calculera J+T+P. Dans cet énoncé, l'objectif secondaire est explicité à la lecture (ordre séquentiel des prénoms) et le coût de la construction de la représentation alternative est moins élevé que pour les deux autres énoncés. Cela vérifie et précise ce que Devidal, Fayol et Barrouillet (1997) ont montré : le placement de la question en tête plutôt qu'en fin d'énoncé entraîne une amélioration des performances de résolution (activation du schéma de résolution adéquat, calculs effectués au fur et à mesure de la lecture de l'énoncé, allègement de la mémoire de travail).

Par contre, les élèves de CM2 ne mettent pas en place de stratégie séquentielle pour Q3, contrairement à des adultes « à faible empan de mémoire ● ». Cela peut être expliqué par le fait que les capacités en lecture, la flexibilité mentale sont des habiletés qui se développent avec l'âge. « *Plus la représentation alternative diffère de la représentation initiale (i.e., coût élevé), moins les enfants opèrent la transformation* » (Thevenot, 2008).

Thevenot, Barrouillet et Fayol (2004) cherchent à déterminer à quel moment précis les calculs sont effectués, sans passer par des protocoles verbaux (explicitation de la stratégie), qui peuvent modifier la stratégie en cours.

Les performances de l'élève vont donc dépendre de sa capacité à mettre en relation un cadre déjà abordé, un schéma, une représentation ou bien d'utiliser des outils, méthodes, stratégies pour y parvenir, à partir des caractéristiques sémantiques de l'énoncé. Mais elles peuvent aussi dépendre des capacités de l'élève en compréhension du texte, capacités qui peuvent être influencées par le contexte de la classe, ou l'enseignant-e, par un énoncé trop caricatural. Gravemeijer (1997, cité par Barrouillet & Camos, 2003) évoque le « *caractère stéréotypé de la plupart des problèmes à énoncés verbaux, celui-ci résultant du "*classroom climate*", autrement dit du contrat didactique résultant de l'objectif poursuivi par le maître* ». Gamo *et al.* (2014) ont testé l'efficacité d'une démarche permettant à des élèves en éducation prioritaire de construire des représentations alternatives, en travaillant par analogie entre problèmes et par comparaison entre procédures. Ils se sont appuyés sur des études montrant les difficultés à organiser l'information, à changer de point de vue au cours de la réalisation de différentes activités mathématiques ; le manque de flexibilité dans l'interprétation d'un problème ; la difficulté à intégrer les données d'un énoncé en une représentation cohérente, difficultés qui ne s'expliqueraient pas uniquement par de faibles performances en mémoire de travail. Les élèves de milieux défavorisés ont par ailleurs une relation aux savoirs scolaires qui peut induire des difficultés à articuler connaissances mathématiques et « connaissances de monde réel ».

Empan de mémoire : nombre maximal d'éléments constituant une série qui peut être mémorisée en une seule fois.

CONTEXTUALISER LES APPRENTISSAGES

Les faits et les principes

« *Les pays qui préparent mieux leurs élèves à utiliser leurs connaissances dans des contextes de la vie réelle sont également ceux dont les élèves sont le plus à l'aise avec les processus cognitifs requis dans la résolution des problèmes de la vie courante, comme interagir avec des applications technologiques non familières* » (OCDE, 2014a).

Ces connaissances pragmatiques ou *word problem schema* (WPS) mettent *« en œuvre des processus d'interprétation pragmatiques qui s'ajoutent aux processus d'interprétation sémantique* » (De Corte & Verschaffel, 1985). Ces WPS semblent acquis vers l'âge de 8 ans (Barrouillet & Camos, 2003) et sont rendus nécessaires par la nature stéréotypée des problèmes scolaires qui s'opposent aux problèmes quantitatifs de la vie réelle.

Des recherches multidisciplinaires montrent l'importance de la modification du contexte d'apprentissage sur l'acquisition des apprentissages. De Corte et Verschaffel ont mené une expérience avec des élèves de CM2 en Belgique néerlandophone. Cette recherche fait suite aux changements curriculaires adoptés par le Parlement flamand à la fin des années 1990, accompagnés de recommandations insistant sur « *l'importance du raisonnement mathématique, de la capacité à résoudre des problèmes et* *de l'applicabilité des savoirs mathématiques aux situations de la vie réelle* » (De Corte & Verschaffel, 2008). Le but du projet de recherche visait à concevoir et évaluer un dispositif stimulant le processus d'apprentissage approprié à ces objectifs. Le contexte d'apprentissage a été « radicalement modifié » dans les classes expérimentales, dans quatre directions :

- centrer l'environnement d'apprentissage sur l'acquisition par les élèves d'une stratégie métacognitive globale pour la résolution de problèmes : construire une représentation mentale du problème, décider comment résoudre le problème, faire les calculs nécessaires, interpréter les résultats et formuler une réponse, évaluer la réponse. Cela suppose de prendre conscience de chacune de ces étapes (stimuler la réflexivité) ; d'être capable de superviser et évaluer ses actions au cours de ces étapes (stimuler l'autorégulation) ;
- utiliser une série variée de problèmes ouverts et complexes, que les auteurs qualifient prudemment de réalistes, voire authentiques, présentés sous des formats très divers (articles de journaux, bande dessinée, tableau, etc.) ;
- utiliser des techniques pédagogiques variées, selon un modèle basé sur l'enchaînement de séquences d'activités suivantes : courte introduction faite en classe entière ; deux sessions de problèmes à résoudre, en petits groupes hétérogènes ; discussion en classe entière ; tâche individuelle suivie d'une discussion en classe entière. L'enseignant apporte aide et stimulation, lesquelles s'amenuisent au fur et à mesure que les élèves prennent conscience de leur activité de résolution de problèmes. « *Plusieurs des principes pédagogiques sont ici mis en jeu : stimulation d'un apprentissage actif et constructif, création d'opportunités pour la collaboration, développement de l'autorégulation de l'apprentissage en prenant en compte les différences individuelles* » (De Corte & Verschaffel, 2008) ;
- créer une nouvelle culture de classe, développer des attitudes et croyances positives par rapport aux mathématiques et à la résolution de problèmes ; « *discuter de ce qu'est un bon problème, une bonne réponse et une bonne procédure de résolution (par ex. : "il y a souvent différentes façons de résoudre un problème" ; "pour plusieurs problèmes, une bonne estimation est une meilleure réponse qu'un nombre exact")* » (De Corte & Verschaffel, 2008) ;
- reconsidérer le rôle du professeur et des élèves dans la classe de mathématiques.

Arithmétiser le monde, faire entrer la réalité en classe

Proposer des situations problèmes ne pose pas seulement un problème de connaissances conceptuelles ou de compétences mathématiques. Nunes et Bryant ont travaillé sur l'environnement physique et social des questions d'arithmétisation du monde auquel sont confrontés les élèves dans les situations problèmes abordées en classe (Nunes & Bryant, 1996 ; Nunes et *al*., 2009).

Comment faire entrer la réalité en classe ? En transposant un problème de la vie réelle en problème scolaire, tout en évitant les simplifications abusives et en contraignant les élèves à des activités de recherche des valeurs nécessaires ; en contextualisant les problèmes, c'est-à-dire en plongeant un problème de type stéréotypé dans une situation réelle, en l'intégrant dans une histoire faite d'actions de la vie courante.

Pour Barrouillet et Camos (2003), il est nécessaire de proposer à la fois des « *problèmes de l'école* » et des « *problèmes du monde réel* » ne serait-ce que parce qu'ils représentent à la fois des objectifs différents pour l'enseignant et des activités différentes pour les élèves.

« *Sur le plan didactique, les programmes visant à rendre les problèmes plus proches de la vie et à "faire entrer la réalité dans la classe" sont probablement une voie à explorer qui répond au vœu exprimé par Dehaene d'un enseignement des mathématiques qui ne coupe pas l'enfant de ses intuitions initiales. Il convient toutefois de rester prudent. D'une part, il n'est pas clairement établi que les enfants raisonnent nécessairement mieux sur les situations qui leur sont familières. D'autre part, les difficultés qu'ils rencontrent ne sauraient tenir au seul aspect figé et artificiel de l'énoncé type. Elles révèlent sans doute aussi des lacunes conceptuelles plus profondes* » (Barrouillet & Camos, 2003).

L'application des mathématiques aux situations de la vie réelle : efficace ou non?

Pour Hattie, dans sa méta-analyse sur les pratiques efficaces (2009), une telle approche aurait un impact légèrement négatif (Mullis *et al.*, 2012). C'est pourtant une pratique largement préconisée en Europe, soit pour des raisons d'efficacité pour les apprentissages, soit pour préparer à la vie adulte. L'enquête TIMSS 2007 révèle que, selon les enseignants, il est souvent demandé aux élèves d'établir un lien entre les mathématiques et la vie quotidienne (c'est le cas pour 60 % des élèves de 4^{e} année de primaire, dans plus de la moitié des cours).

Ce lien entre vie quotidienne et cours de mathématiques semble cependant moins évident pour les élèves, puisque, toujours dans l'enquête TIMSS 2007, 39 % des élèves y font référence contre 53 % des enseignants. On peut dès lors se demander si cet écart de perception n'est pas dû à un défaut d'explicitation de la part des enseignants (Mullis *et al.*, 2012).

En 1975, Adda écrivait que « *de nombreuses questions posées aux enfants dans les cours de mathématiques [pouvaient être] considérées par eux comme des devinettes* ». Pour elle, les enseignants contrent l'abstraction intrinsèque des mathématiques en proposant aux élèves des situations concrètes. Or, cette « mathématique concrète » est facteur de malentendus ou d'incompréhensions, tenant à la fois à des contextes mal définis ou un usage des mots censés « habiller le problème mathématique » simplificateur pour l'enseignant mais plus compliqué pour l'élève. Il reste pour bon nombre d'élèves un problème de transposition, de transfert à un problème de même type. Nombre de malentendus sont dus à ces « *situations à mathématiser* » souvent inventées pour « *voiler, cacher la mathématique* ». « *L'art de fabriquer des exercices se confond alors avec l'art de rendre compliqué ce qui est simple* » (Adda, 1975).

Brissiaud (2007) cite Vygotski qui différencie les résolutions de problèmes en deux types : les Q-problèmes (qui touchent à la vie quotidienne) et de E-problèmes (E comme école ou enseignement, qui ne sont résolus que par des élèves ayant fréquenté l'école, ayant appris à faire des opérations).

« *Pour chacun des principaux types de problèmes scolaires […] qui, à terme, doivent être résolus par une soustraction, une multiplication ou une division, il est possible, en changeant seulement les valeurs numériques […] de produire des Q-problèmes qui sont assez bien réussis avant tout enseignement de ces opérations et des E-problèmes pour lesquels l'échec est massif avant cet enseignement* » (Brissiaud, 2007).

Les systèmes scolaires élaborent « *des exercices dont l'objectif est explicitement l'apprentissage systématique de la résolution de problèmes particuliers [et dont] les formes et contenus sont* *fortement stéréotypés* ». Les situations décrites, qui relatent une histoire, et prennent une forme textuelle particulière (le problème), sont souvent décontextualisées. Il n'y a pas d'enjeu en cas d'erreur de calcul, et pas d'état d'âme à trouver des résultats irréalistes. Fayol *et al*. (2005) évoquent les baignoires qui pourraient déborder ou les ponts s'écrouler.

LES PRATIQUES ENSEIGNANTES ET LEURS EFFETS

« *Les analyses montrent que si le développement d'heuristiques et l'utilisation de problèmes "non routiniers" font leur chemin auprès des enseignants du primaire, ceux-ci, confrontés aux situations pratiques, semblent rester dans une perspective valorisant les modes formels de résolution au détriment de la diversité des heuristiques* » (Vlassis *et al*., 2014).

LES REPRÉSENTATIONS DES ENSEIGNANTS

À partir d'un questionnaire distribué à 900 enseignants de l'enseignement primaire du Grand Duché du Luxembourg, Vlassis *et al.* (2014) ont travaillé sur trois axes :

- le rôle des problèmes dans l'apprentissage de contenus, dans le développement de stratégies de résolution ou dans l'application des procédures enseignées préalablement ;
- l'utilisation de problèmes routiniers/non routiniers par les enseignants ;
- le développement d'heuristiques de résolution (ouverture ou non des enseignants à la diversité des stratégies de résolution).

Les résultats de l'enquête montrent que, pour une très large majorité d'enseignants (95 %), les problèmes servent à développer des stratégies de résolution ; l'acquisition de connaissances ou l'intégration de procédures connues leur semblent de moindre importance. Néanmoins, les enseignants privilégient tout autant les problèmes pour appliquer les opérations apprises (46 %) que pour apprendre des stratégies (44 %). Seuls 7 % des enseignants utilisent les problèmes pour introduire une nouvelle notion. « *Les enseignants se sont majoritairement prononcés en faveur [...] des propositions comme "il est intéressant de proposer des problèmes qui aboutissent à plusieurs solutions" (88 %) et "il est intéressant de favoriser des problèmes dont la recherche de la solution peut être trouvée par plusieurs démarches différentes" (95%), propositions correspondant à la valorisation de problèmes non routiniers* » (Vlassis *et al.*, 2014). Paradoxalement, si 44 % des enseignants jugent intéressants les problèmes non routiniers, ceux-ci ne font pas encore partie de leurs pratiques. Pour expliquer cette ambiguïté, les enseignants évoquent les programmes, les manuels et les évaluations. On constate également une ambiguïté quant au développement des heuristiques de résolution (utilisation de dessins, schémas, tâtonnements, etc.), dont le poids dans les évaluations est bien moindre que les équations et calculs, notamment dans les plus petites classes. Les enseignants, notamment les plus « traditionnels », ont du mal à valider une solution par tâtonnement, considérant que « *cela a l'air d'être des essais et erreurs* », que la solution « *n'est pas exprimée mathématiquement* ».

Parallèlement ou conséquemment, les élèves « *mettent le sens entre parenthèses* » pour résoudre des problèmes verbaux (voir Greer, 1993 ; Verschaffel, De Corte & Lasure, 1994), c'est-à-dire qu'ils ont « *tendance à exclure la connaissance du monde réel lors de la résolution de problèmes verbaux administrés dans le contexte étroit de l'arithmétique scolaire* » (Verschaffel & De Corte, 2008). Un des exemples très souvent utilisés pour montrer la déconnexion avec le réel est celui du « bus » : un certain nombre de personnes doivent voyager en bus, à la question « combien de bus sont nécessaires pour que tous les personnes puissent faire le voyage ? », une part non négligeable des élèves interprète de manière erronée le reste de la division en arrondissant au nombre inférieur.

Plusieurs auteurs expliquent cette difficulté par l'interprétation faite par les élèves de règles du jeu implicites ou tacites :

- « *tous les problèmes présentés par un enseignant ou dans un manuel scolaire peuvent être résolus et ont du sens ;*
- *il existe une seule réponse correcte à chaque problème verbal, et celle-ci est nécessairement précise et numérique ;*
- *cette réponse doit être obtenue en réalisant une ou plusieurs opérations mathématiques ou en utilisant des formules avec les nombres fournis dans le problème, et quasi toujours avec tous ces nombres ;*
- *la tâche peut être réalisée en utilisant des connaissances mathématiques que possède un élève, en appliquant les concepts mathématiques, les formules, les algorithmes, etc. récemment étudiés au cours de mathématiques ;*
- *la solution finale, et même les résultats intermédiaires, sont des nombres entiers (généralement de petits nombres) ;*
- *le problème verbal lui-même contient toutes les informations nécessaires pour trouver l'interprétation mathématique correcte et la solution du problème ; aucune information externe au problème n'est nécessaire ;*
- *les personnes, les objets, les lieux, les événements, etc. sont différents dans les problèmes verbaux présentés à l'école et dans ceux rencontrés dans les situations du monde réel ; il ne faut pas (trop) s'inquiéter si nos connaissances ou nos intuitions relatives au monde quotidien sont violées dans les situations décrites dans les problèmes scolaires* » (Verschaffel & De Corte, 2008).

Ces croyances sont par ailleurs encouragées par des pratiques d'enseignement et d'évaluation (tests) proposant des problèmes verbaux « sémantiquement pauvres ». De plus, une analyse des modalités de résolution de problèmes verbaux pratiquées par de futurs enseignants en Belgique montre le « *manque de disposition des étudiants-enseignants envers la modélisation réaliste* », notamment lors de la première année de formation, pratique imputable à la scolarité de ces futurs enseignants et restant rationnelle, « *en accord avec les conditions qu'ils étaient contraints de respecter dans le contrat didactique pour la résolution de problèmes arithmétiques verbaux* » (Verschaffel & De Corte, 2008). Sans que puisse être établie une corrélation entre croyances des enseignants et difficultés des élèves, Verschaffel et De Corte préconisent un usage plus important des problèmes réalistes, non routiniers, avec des techniques interactives, en petits groupes, en tentant « *d'établir une nouvelle culture de classe en négociant explicitement de nouvelles normes sociales à propos du rôle de l'enseignant et des élèves dans la classe, ainsi que de nouvelles normes socio-mathématiques à propos de ce qui doit être considéré comme un bon problème mathématique verbal, une bonne démarche de résolution et une bonne réponse* ».

L'APPRENTISSAGE DU SAVOIR-FAIRE FACE AUX PRATIQUES

Les enseignants proposent régulièrement des séances de résolution de problèmes. En France, 90 % des enseignants déclarent y consacrer des temps spécifiques, de l'ordre d'une à deux séances par semaine (un peu plus d'un tiers des enseignants selon Durpaire *et al*., 2006). Cependant, l'activité de recherche, susceptible à la fois de donner du sens, de mobiliser la mémoire à long terme et les connaissances ou stratégies acquises, de permettre la construction de nouvelles connaissances, est bien souvent fortement pilotée par l'enseignant. À la suite d'une expérimentation, en France, Priolet conclut que « *les activités liées à la recherche, à la mise en réseau et à la conversion de représentations ne sont pas mises en œuvre de façon régulière et concomitante* »

(Priolet, 2014). Elle note une amélioration des performances des élèves dès lors que les séances sont réellement orientées vers la résolution effective de problèmes, respectant un certain dispositif pédagogique et didactique, caractérisé par la recherche de solution à des situations problèmes, la mise en réseau des connaissances, la conversion des représentations (registres textuel/ numérique/ iconique) et la catégorisation des situations problèmes (l'enseignant demande à l'élève de catégoriser les problèmes pour construire un ensemble de *« schémas-référents »,* voir Priolet, 2014).

Les recherches donnent peu d'éléments permettant d'évaluer la réalisation de la tâche « résolution de problème ». Pour De Corte et Veschaffel (2008), cela tient à la focalisation sur le produit de l'activité de l'élève et inversement à la négligence du processus par lequel l'élève a atteint le résultat. Ils mettent ainsi en avant la nécessité d'intégrer l'évaluation à l'enseignement et de prévoir des évaluations alternatives à une évaluation sommative, de contrôle de résultat.

L'évaluation des compétences à résoudre des problèmes ne peut se satisfaire d'une évaluation des compétences générales. Un élève performant sur des compétences procédurales ou des savoirs académiques n'est pas forcément performant en résolution de problèmes. On a vu qu'il est nécessaire de savoir mobiliser ses connaissances et compétences de base pour appliquer, raisonner, choisir des stratégies de résolution.

BIBLIOGRAPHIE

Vous retrouverez ces références et quelques autres dans notre bibliographie collaborative en ligne, qui comprend les références complètes et, le cas échéant, des accès aux articles cités (en accès libre ou en accès payant, selon les cas et selon les abonnements électroniques souscrits par votre institution).

- Adda Josette (1975). « L'incompréhension en mathématiques et les malentendus ». *Educational Studies in Mathematics*, vol. 6, n° 3.
- Arsac Gilbert, Germain Gilles, Mante Michel (1991). *Problème ouvert et situation-problème*. Lyon : IREM de Lyon.
- Ashcraft Marc & Battaglia John (1978). « Cognitive arithmetic: Evidence for retrieval decision processes in mental addition ». *Journal of Experimental Psychology: Human Learning and Memory*, vol. 4, n° 5, p. 527-538.
- Ashcraft Marc & Fierman Bennett (1982). « Mental addition in third, fourth, and sixth graders ». *Journal of Experimental Child Psychology*, vol. 33, n° 2, p. 216-234.
- Barrouillet Pierre & Camos Valérie (2003). « Savoirs et savoir-faire arithmétiques et leurs déficiences ». In Michèle Kail & Michel Fayol (dir.), *Les sciences cognitives et l'école*. Paris : PUF, p. 307-351.
- Borgonovi Francesca (2012). « Quelle confiance les élèves ont-ils en leur capacité à résoudre des problèmes de mathématiques ? ». *PISA à la loupe*, n° 56.
- Brissiaud Rémi (2002). « Psychologie et didactique : choisir des problèmes qui favorisent la conceptualisation des opérations arithmétiques ». In J. Bideaud et H. Lehalle (dir.), *Traité des sciences cognitives : le développement des activités numériques chez l'enfant*. Paris : Hermès.
- Brissiaud Rémi (2004). « La résolution de problèmes arithmétiques : une étude longitudinale au CE1 ». In ARDM (dir.), *Séminaire national de didactique des mathématiques 2004, les actes*, Paris : ARDM, p. 223-228.
- Brissiaud Rémi (2006). « Calcul et résolution de problème arithmétiques : il n'y a pas de paradis pédagogique perdu ». *Café pédagogique*, 30 mai.
- Brissiaud Rémi (2007). « Calcul mental, symbolisme arithmétique et résolution de problèmes : quelques apports récents de la psychologie cognitive et culturelle ». APAMEP, n° 469, p. 213-224.
- Cabassut Richard (2004). « Raisonnement plausible versus raisonnement de nécessité : où est la frontière ? ». In *Actes du 31e colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres*, *Foix*, p. 1-16.
- Charnay Roland (1992). « Problème ouvert, problème pour chercher ». *Grand N*, n° 51, p. 77-83.
- De Corte Erick & Verschaffel Lieven (1985). « Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems ». *Journal of Mathematical Behavior, n° 4*, p. 3-21.
- De Corte Erick & Verschaffel Lieven (2008). « Apprendre et enseigner les mathématiques : un cadre conceptuel pour concevoir des environnements d'enseignement-apprentissage stimulants ». In Marcel Crahay *et al.* (dir.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques*. Bruxelles : De Boeck Supérieur, p. 5-54.
- Demonty Isabelle & Fagnant Annick (2012). « Les différentes fonctions de la résolution de problèmes sont-elles présentes dans l'enseignement primaire en communauté française de Belgique ? ». In Jean-Luc Dorier & Sylvia Coutat (dir.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012 (SPE3)*, p. 1752-1760.
- Devidal Michel, Fayol Michel & Barrouillet Pierre (1997). « Stratégies de lecture et résolution de problèmes arithmétiques ». *L'année psychologique*, vol. 97, n° 1, p. 9-31.
- Durpaire Jean-Louis (2006). *L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire. Rapport de l'Inspection générale de l'Éducation nationale*. Paris : ministère de l'Éducation nationale.
- EACEA (2011). *L'enseignement des mathématiques en Europe : défis communs et politiques nationales*. Bruxelles : Eurydice.

- Fayol Michel, Thevenot Catherine & Devidal Michel (2005). « Résolution de problème/résolution de problèmes arithmétiques ». In Marie-Pascale Noël (dir.), *Approche neuropsychologique et développementale des difficultés de calcul chez l'enfant*, Paris : Solal, p. 193-221.

- Feyfant Annie (2015). *Apprentissages des nombres et opérations : les données du problème*. Dossier de veille de l'IFÉ, n° 102, juin. Lyon : ENS de Lyon.

- Focant Jérôme & Grégoire Jacques (2008). « Les stratégies d'autorégulation cognitive : une aide à la résolution de problèmes arithmétiques ». In Marcel Crahay *et al*. (dir.). *Enseignement et apprentissage des mathématiques*. Bruxelles : De Boeck, p. 201-221.

- Gamo Sylvie, Nogry Sandra & Sander Emmanuel (2014). « Apprendre à résoudre des problèmes en favorisant la construction d'une représentation alternative chez des élèves scolarisés en éducation prioritaire ». *Psychologie française*, n° 59, p. 215-229.

- Gravemeijer Koeno (1997). « Solving word problems: A case of modelling ? ». *Learning and Instruction*, vol. 7, n° 4, p. 389-397.

- Greer Brian (1993). « The modeling perspective on wor(l)d problems ». *Journal of Mathematical Behavior,* vol. 12, n° 3, p. 239-250.

- Hattie John (2009). *Visible learning : A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. Londres ; New-York : Routledge.

- Kintsch Walter & Greeno James G. (1985). « Understanding and solving word arithmetic problems ». *Psychological Review,* vol. 92, n° 1, p. 109-129.

- Levain Jean-Pierre, Le Borgne Philippe & Simard Arnaud (2006). « Apprentissage de schémas et résolution de problèmes en SEGPA ». *Revue française de pédagogie*, n° 155, p. 95-109.

- Mullis Ina, Martin Michael, Foy Pierre & Arora Alka (2012). *TIMSS 2011: international results in mathematics*. Amsterdam : IEA.

- Nunes Terezinha & Bryant Peter (1996). *Children doing mathematics.* Oxford : Blackwell.

- Nunes Terezinha, Bryant Peter & Watson Anne (2009). *Key unterstandings in mathematics learning: overview*. Londres : Nuffield Foundation.

- OCDE (2014a). « Trouver des solutions créatives : quelles sont les compétences des jeunes de 15 ans en résolution de problèmes ? ». *PISA à la loupe*, n° 38, avril.

- OCDE (2014b). « Assessing problem-solving skills in PISA 2012 ». In *PISA 2012 Results: Creative Problem Solving (Volume V) : Students' Skills in Tackling Real-Life Problems*. Paris : OCDE, p. 25-46.

- Ontario. Ministère de l'Éducation (2005). *Le curriculum de l'Ontario, de la 1e à la 8e année*. Toronto : Ministère de l'Éducation.

- Pallascio Richard (2005). « Les situations-problèmes : Un concept central du nouveau programme de mathématique ». *Vie pédagogique*, n° 136, p. 32-35.

- Priolet Maryvonne (2014). « Enseignement-apprentissage de la résolution de problèmes numériques à l'école élémentaire : un cadre didactique basé sur une approche systémique ». *Éducation et didactique,* vol. 8, n° 2, p. 59-86.

- Richard Jean-François (1997). « La résolution de problèmes ». *Recherche en soins infirmiers*, n° 50, p. 47-54.

- Riley Mary, Greeno James & Heller Joan (1984). « Development of children's problem-solving ability in arithmetic ». In Herbert Ginsburg (dir.), *The development of mathematical thinking*. New York : Academic Press, p. 153-196.

- Sander Emmanuel (2000). *L'analogie, du naïf au créatif : analogie et catégorisation*. Paris : L'Harmattan.

- Sarrazy Bernard (2008). « De quelques effets de contrats et du rôle des situations didactiques dans la résolution de problèmes d'arithmétique au cycle 3 ». *Actes du séminaire national L'enseignement des mathématiques à l'école primaire*, Paris, 13-14 novembre 2007. Paris : Ministère de l'Éducation ; Eduscol, p. 61-81.

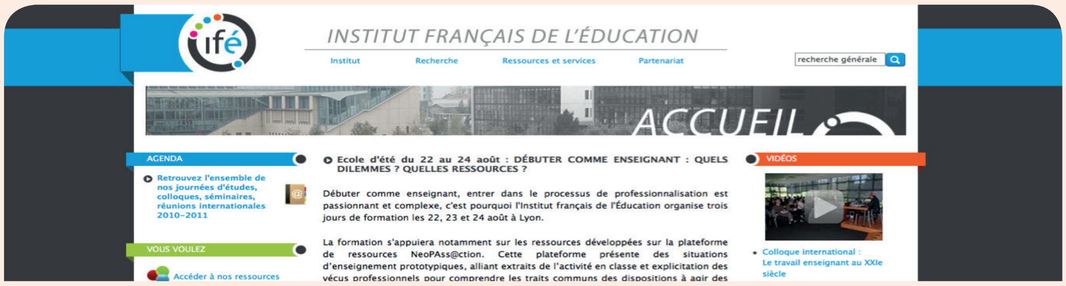
- Schank Roger C. & Abelson Robert P. (1977). *Scripts, plans, goals, and understanding.* Hillsdale : Laurence Erlbaum.

- Squire Sarah & Bryant Peter (2002). « From sharing to dividing. Young children's understanding of division ». *Developmental Science*, vol. 5, n° 4, p. 452-466.

- Thevenot Catherine (2008). « Représentations mentales et stratégies de résolution de problèmes arithmétiques verbaux chez les enfants de CM2 ». *L'année psychologique*, vol. 108, n° 4, p. 617-630.
- Thevenot Catherine & Perret Patrick (2009). « Le développement du raisonnement dans la résolution de problèmes : l'apport de la théorie des modèles mentaux. ». *Développements,* n° 2, p. 49-56.
- Thevenot Catherine, Barouillet Pierre & Fayol Michel (2004). « Représentation mentale et procédures de résolution de problèmes arithmétiques : l'effet du placement de la question ». *L'année psychologique*, vol. 104, n° 4, p. 683-699.
- Vergnaud Gérard (1982). « A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems ». In Thomas Carpenter, James Moser & Thomas Romberg (dir.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale : Erlbaum, p. 39-59.
- Verschaffel Lieven & De Corte Erick (1997). « Teaching realistic mathematical mode- ling in the elementary school: A teaching experiment with fifth graders ». *Journal for Research in Mathematics Education*, n° 28, p. 577-601.
- Verschaffel Lieven & De Corte Erick (2008). « La modélisation et la résolution des problèmes d'application : de l'analyse à l'utilisation efficace ». In Marcel Crahay *et al. (dir.)*, *Enseignement et apprentissage des mathématiques*. Bruxelles : De Boeck Supérieur, p. 153-176.
- Verschaffel Lieven, De Corte Erick & Lasur Sabien (1994). « Realistic considerations in mathematical modelling of school arithmetic word problems ». *Learning and Instruction,* vol. 4, n° 4, p. 273-294.
- Verschaffel Lieven, Greer Brian & De Corte Erick (2000). *Making sense of word problems*. Lisse : Swets & Zeitlinger.
- Verschaffel Lieven, De Corte Erick, Lasure Sabien *et al*. (1999). « Learning to solve mathematical application problems: A design experiment with fifth graders ». *Mathematical Learning and Thinking*, vol 1, n° 3, p. 195-229.
- Vlassis Joëlle, Mancuso Giovanna, Poncelet Déborah (2014). « Le rôle des problèmes dans l'enseignement des mathématiques : analyse des croyances d'enseignants du primaire ». *Cahiers des Sciences de l'Éducation*, vol. 36, n° 1, p. 143–175.
- Willis Gordon & Fuson Karen (1988). « Teaching children to use schematic drawings to solve addition and substraction word problems ». *Journal of Educational Psychology*, vol. 80, n° 2, p. 192-201.

Notes

n° 105
Nov. 2015



Pour citer ce dossier :

Feyfant Annie (2015). *La résolution de problèmes mathématiques au primaire*. Dossier de veille de l'IFÉ, n° 105, novembre. Lyon : ENS de Lyon.

En ligne : http://ife.ens-lyon.fr/vst/DA/detailsDossier.php?parent=accueil&dossier=105&lang=fr

Retrouvez les derniers Dossiers de veille de l'IFÉ :

- Reverdy Catherine, Thibert Rémi (2015). *Le leadership des enseignants au cœur de l'établissement*. Dossier de veille de l'IFÉ, n° 104, octobre. Lyon : ENS de Lyon.

  En ligne : http://ife.ens-lyon.fr/vst/DA/detailsDossier.php?parent=accueil&dossier=104&lang=fr

- Endrizzi Laure (2015). *Le développement de compétences en milieu professionnel*. Dossier de veille de l'IFÉ, n° 103, septembre. Lyon : ENS de Lyon.

  En ligne : http://ife.ens-lyon.fr/vst/DA/detailsDossier.php?parent=accueil&dossier=103&lang=fr

- Feyfant Annie (2015). *L'apprentissage des nombres et opérations : les données du problème*. Dossier de veille de l'IFÉ, n° 102, juin. Lyon : ENS de Lyon.

  En ligne : http://ife.ens-lyon.fr/vst/DA/detailsDossier.php?parent=accueil&dossier=102&lang=fr

Abonnez-vous aux Dossiers de veille de l'IFÉ :

http://ife.ens-lyon.fr/vst/abonnement.php

Institut français de l'Éducation
Veille et Analyses
15 parvis René-Descartes BP 7000 – 69342 Lyon cedex 07
veille.scientifique@ens-lyon.fr
Standard : +33 (04) 26 73 11 24
ISSN 2272-0774

ENS DE LYON